Adı Soyadı: 12.06.2023

Numarası:

2022-2023 BAHAR DÖNEMİ SOYUT MATEMATİK II FİNAL SINAVI SORULARI

1) a) $p, q, r \in \mathbb{Q}$, olmak üzere $p^* + q^* + r^* = (p+q+r)^*$ olduğunu gösteriniz.

   b) $\alpha = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 5\} \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ kümesi bir kesim olur mu?

2) a) Tam sayılarda çarpma işleminin değişmeli olduğunu gösteriniz ve [2,3] tam sayısının küpünü bulunuz.

   b) $[(5,7)][(b,1)] + [(b,-3)] = [(16,-7)]$ eşitliğindeki b bilinmeyenini varsa bulunuz.

3) a) $A = \{3, 4, 11, 30, 67, 128, 219, \ldots\}$ kümesinin sayılabilir olup olmadığını sayılabilirlik tanımını kullanarak gösteriniz.

   b) $(-\infty, -c)$ ile (c, ∞) kümelerinin eş güçlü olduğunu gösteriniz.

BAŞARILAR

Dr. Çağla ÇELEMOĞLU

Cevaplar

1) a) Bunun için her ikisi de birbirinin alt kümesi olmalıdır. Öncelikle keyfi bir

$x+y+z \in p^* + q^* + r^* \Rightarrow x \in p^* \wedge y \in q^* \wedge z \in r^*$

$\Rightarrow x < p \wedge y < q \wedge z < r$

$\Rightarrow x+y+z < p+q+r$

$\Rightarrow x+y+z \in (p+q+r)^*$

Buradan $p^*+q^*+r^* \subseteq (p+q+r)^*$ ...(1)...

elde edilir. Şimdi de tersine keyfi bir

$k \in (p+q+r)^* \Rightarrow k < p+q+r$ olup

$a = (p+q+r) - k > 0$ alalım. Buradan

$b = p - \frac{a}{3} < p \Rightarrow b \in p^*$

$c = q - \frac{a}{3} < q \Rightarrow c \in q^*$

$d = r - \frac{a}{3} < r \Rightarrow d \in r^*$

$\Rightarrow \underline{b}+\underline{c}+\underline{d} = p+q+r-a = k \in \underline{p^*}+\underline{q^*}+\underline{r^*}$

$\Rightarrow (p+q+r)^* \subseteq p^*+q^*+r^*$ ...(2)...

(1) ve (2) den istenen eşitlik elde edilir.

1 b) α kesim olur mu?

K1) $\alpha \neq \emptyset$: $0 \in \alpha$ (farklı örnekler verilebilir.)

$\alpha \neq \mathbb{Q}$: $3 \in \mathbb{Q}$ fakat $3 \notin \alpha$

K2) $p \in \alpha$ ve $q < p$ olsun. $p \in \alpha$ ise

3 durum vardır. 1. durum

$p \in \mathbb{Q}^+$ ve $p^2 < 5 \Rightarrow q < p$ (ve q pozitif ise)

$\Rightarrow q^2 < p^2 < 5 \Rightarrow q^2 < 5$

$\Rightarrow q \in \alpha$

q negatif ise $\mathbb{Q}^- \subseteq \alpha$ old $q \in \alpha$

2. durum

$p = 0$ ve $q < p \Rightarrow q \in \mathbb{Q}^-$ olup $q \in \alpha$

3. durum

$p \in \mathbb{Q}^-$ ve $q < p \Rightarrow q \in \mathbb{Q}^-$ olup $q \in \alpha$

K3) Kümenin tanımından $p^2 < 5$ durumunu sağlayan en büyük $p \in \mathbb{Q}^+$ var olmadığı gösterir. Yani EBE(α) yoktur. Ya da aksini kabul edelim. EBE(α) $= p$ olsun. O halde $p^2 < 5$ o.ş $p \in \mathbb{Q}^+$ vardır. Fakat $(p+a)^2 < 5$ o.ş bir $a \in \mathbb{Q}^+$ da bulunabilir. Bu bir çelişkidir.

K1, K2, K3 sağlandığından α bir kesimdir.

2 a) Tam sayılarda çarpma işlemi

$\forall [a,b), [c,d] \in \mathbb{Z}$ için $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ olup

$$[a,b] \odot [c,d] = [ac+bd,\ ad+bc]$$

$\mathbb{N}$ de "$\cdot$" nın değişme öz

$$= [ca+db,\ da+cb]$$

$\mathbb{N}$ de "$+$" nın değişme öz

$$= [ca+db,\ cb+da]$$

$$= [c,d] \odot [a,b]$$

Bu durumda $[2,3]$'ün küpünü bulmak için öncelikle karesini hesaplayalım.

$$[2,3] \odot [2,3] = [4+9,\ 6+6]$$

$$= [13,12] = [2,3]^2$$

$$[13,12] \odot [2,3] = [26+36,\ 39+24]$$

$$= [62,63] = [2,3]^3$$

2 b) $[(5,7)] \odot [(b,1)] + [(b,-3)] = [(16,-7)]$

$\Rightarrow \quad [(5b,7)] + [(b,-3)] = [(16,-7)]$

$\Rightarrow \quad [(-15b+7b,\ -21)] = [(16,-7)]$

$\Rightarrow \quad [(-8b,\ -21)] = [(16,-7)]$

$\Rightarrow \quad (-8b,-21)\ \beta\ (16,-7)$

$\Rightarrow \quad -8b \cdot (-7) = (-\cancel{21}_{3}) \cdot \cancel{16}_{-2}$

$\Rightarrow \quad b = -6 \in \mathbb{Z}$

3 a) Öncelikle kümeyi düzenleyelim.

$A = \{n^3+3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ile yazılır.

$$f : \mathbb{N} \to A$$
$$n \to f(n) = n^3+3$$

ile tanımlanırsa $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için $n_1 = n_2$ ise $f(n_1) = n_1^3+3 = n_2^3+3 = f(n_2)$ olup f iyi tanımlıdır. Yani fonksiyondur.

(*) f 'nin birebirliği : $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1^3+3 = n_2^3+3$$
$$\Rightarrow n_1^3 = n_2^3$$
$$\Rightarrow n_1 = n_2$$ olup f birebirdir.

(**) f 'nin örtenliği : $\forall x \in A$ için

A 'nın tanımı gereği $x = n^3+3$, $n \in \mathbb{N}$ old. $f(n) = n^3+3$ o.ş. $\exists n \in \mathbb{N}$ vardır. f örtendir.

O halde $A \approx \mathbb{N}$ olup A kümesi sayılabilir sonsuzdur.

3 b) $g : (-\infty, -c) \longrightarrow (c, \infty)$

$x \longrightarrow g(x) = -x$

ile tanımlanırsa $x < -c \Rightarrow g(x) = -x > c$

olup $g(x) \in (c, \infty)$ yani g kapalıdır

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, -c)$ için $x_1 = x_2$

$\Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$ olup

g iyi tanımlıdır. Benzer şekilde

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, -c)$ için $g(x_1) = g(x_2)$

$\Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ olup g birebirdir

$\forall a \in (c, \infty) \Rightarrow -a \in (-\infty, -c)$ olup

$g(-a) = a$ o.ş. $\exists -a \in (-\infty, -c)$

bulunduğundan g örtendir. Yani

$$(-\infty, -c) \approx (c, \infty)$$

bulunur